

27/04/15.

Συνάρτηση Möbius

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \exists P: n \text{ ποτερος} : p^2 | n \\ (-1)^K, & n = p_1 \cdot \dots \cdot p_K \end{cases}$$

†

Πολλάδιο #5

Ασκ. ① : $\mu(n) \cdot \mu(n+1) \cdot \mu(n+2) \cdot \mu(n+3) = 0 = \mu(n(n+1)(n+2)(n+3))$
Nδο $\forall n \geq 1$

Λύση : • Αν n άρτιος $\Rightarrow n = 2\alpha$, για $\alpha \in \mathbb{N}$.

(2) άρα και $n+2$: άρτιος $= 2\alpha+2 = 2(\alpha+1)$, $\alpha \in \mathbb{N}$

Τότε : $n(n+1)(n+2)(n+3) = 2\alpha(n+1)2(\alpha+1) \cdot (n+3) =$
 $= 4\alpha(n+1)(\alpha+1)(n+3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^2 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

Άρα $\mu(n(n+1)(n+2)(n+3)) = 0$

• Αν n περιττός $\Rightarrow n = 2\alpha+1$, $\alpha \in \mathbb{N}$

Άρα $n+1 = 2(\alpha+1)$

$n+3 = 2(\alpha+2) \Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3) = 4(\alpha+1) \cdot n \cdot 2(\alpha+2)$
 $(n+2)$

άρα $2^2 \mid \sqrt{\text{άρα } \mu(n(n+1)(n+2)(n+3)) = 0}$

(1) • Αν $n=1$, τότε : $n+3 = 4 = 2^2 \Rightarrow \mu(n+3) = 0$ (ορίσμός)
 $\Rightarrow$ ~~κ~~ n ① ισχύει.

• Έστω n άρτιος. Τότε θα έχουμε : $n = 2^k \cdot \alpha$, α περιττός
- Αν $k \geq 2$ τότε ~~κ~~ $\mu(n) = 0$.

- Αν $k=1 \Rightarrow n=2\alpha$ και $\alpha: \pi\epsilon\rho\iota\zeta\omega\varsigma \Rightarrow \alpha=2b+1, b \in \mathbb{N}$.

$$\text{Είνα } n+2=2\alpha+2=2(2b+1)+2=2^2(b+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(n+2)=0 \Rightarrow \mu(1) \text{ λογ. δει.}$$

• Αν $n: \pi\epsilon\rho\iota\zeta\omega\varsigma \Rightarrow (n+1): \acute{\alpha}\rho\iota\theta\varsigma = 2\alpha \Rightarrow \pi\acute{\alpha}\rho\omicron\iota\sigma\iota\varsigma \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mu(n+3)=0 \Rightarrow \mu(1) \text{ λογ. δει.}$

Ασκ. ② : $\forall n \geq 3 : \sum_{k=1}^n \mu(k!) = 1 = \mu(1!) + \mu(2!) + \dots + \mu(n!)$

Λύση : $\mu(1!) = 1 = \mu(1)$

$$\mu(2!) = \mu(2) = -1$$

$$\mu(3!) = \mu(6) = \mu(1 \cdot 2 \cdot 3) = \mu(2 \cdot 3) = (-1)^2 = 1$$

$$\mu(4!) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 4) = \mu(2^3 \cdot 3) = 0$$

και $\forall k \geq 4, \mu(k!) = 0$ θα $\exists p$ πρώτος ώστε $p^2 | k$
 άρα $\mu(k) = 0$.

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \sum_{k=1}^n \mu(k!) = \mu(1!) + \mu(2!) + \mu(3!) + \sum_{k=4}^n \mu(k!) =$$

$$= 1 + (-1) + 1 = 1.$$

Ασκ ④ : Αν $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι πολλαπλή συνάρτηση κ' $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε:
 $f((m, n)) \cdot f([m, n]) = f(m) \cdot f(n)$.

Λύση : Αν $n=1$ τότε $f((m, 1)) \cdot f([m, 1]) = f(1) \cdot f(m) = f(m) \cdot f(m)$

Αντίστοιχα $m=1 \Rightarrow f((1, n)) \cdot f([1, n]) = f(1) \cdot f(n) = f(n) \cdot f(n)$.

Έστω $m, n > 1$

Τότε $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ / όπου $p_1, \dots, p_k$ είναι ανά 2 δια-
 $n = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$ φορετικοί κ' $\alpha_i, \beta_i \geq 0, 1 \leq i \leq k$.

$$(m, n) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}$$

$$[m, n] = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}$$

$$f(m, n) \cdot f([m, n]) = f(p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}) \cdot f(p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}})$$

$$= f(p_1^{\min\{\alpha_1, b_1\}}) \dots f(p_k^{\min\{\alpha_k, b_k\}}) \cdot f(p_1^{\max\{\alpha_1, b_1\}}) \dots f(p_k^{\max\{\alpha_k, b_k\}}) \quad (1)$$

~~Εκτίμηση~~

$$\text{Εκτίμηση: } f(m) \cdot f(n) = f(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) \cdot f(p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}) =$$

$$= f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_k^{\alpha_k}) \cdot f(p_1^{b_1}) \dots f(p_k^{b_k}) \quad (2)$$

$$\text{Όπως: } f(p^{\min\{\alpha, b\}}) \cdot f(p^{\max\{\alpha, b\}}) = f(p^\alpha) \cdot f(p^b)$$

Όπου p : Πρώτος, $\alpha, b \geq 1$.

Διότι αν $\min\{\alpha, b\} = \alpha \Rightarrow \max\{\alpha, b\} = b$ και η ισότητα ισχύει
 $\min\{\alpha, b\} = b \Rightarrow \max\{\alpha, b\} = \alpha$ -/-

Οπότε από τις παραπάνω σχέσεις $(1) (2) \Rightarrow (1) = (2)$.

~~Λ~~

$$\text{Αρκ. (8): } \Lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{αν } n = p^m, m \geq 1 \\ & p \text{ πρώτος} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Συνάρτηση του Mangoldt.

(1) Είναι η Λ πολλαί ή ευελιξικά αντιστρέψιμη;

$$(2) \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n.$$

f : ευελιξικά αντιστρέψιμη
 $(\Rightarrow f(1) \neq 0$

Άρα (1) Αντίστοιχο $\Lambda(1) = 0 \neq 1$ και

άρα η Λ δεν είναι ευελιξικά αντιστρέψιμη.

Επειδή $\Lambda(1) = 0 \neq 1 \Rightarrow \Lambda$ όχι πολλαί.

$$(2) \Lambda(1) = 0, \Lambda(2) = \log(2), \Lambda(3) = \log(3), \Lambda(4) = \log(2), \\ \Lambda(5) = \log(5), \Lambda(6) = 0.$$

$$\text{Αν } n=1, \text{ τότε: } \sum_{d|1} \Lambda(d) = \Lambda(1) = 0 = \log(1).$$

Αν $n > 1$ έγω $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ η πρωτογενής ανάλυση του n .

$$\sum_{d|m} \Lambda(d) = \sum_{\substack{0 \leq b_i \leq \alpha_i \\ \forall i=1, \dots, k}} \Lambda(p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}) =$$

$$= \sum_{0 \leq b_1 \leq \alpha_1} \Lambda(p_1^{b_1}) + \dots + \sum_{0 \leq b_k \leq \alpha_k} \Lambda(p_k^{b_k}) =$$

~~ΕΞΕΤΑΣΤΕΣ~~

$$= \cancel{\Lambda(p_1^0)} + \Lambda(p_1^1) + \dots + \Lambda(p_1^{\alpha_1}) + \cancel{\Lambda(p_2^0)} + \dots + \Lambda(p_2^{\alpha_2}) + \dots + \cancel{\Lambda(p_k^0)} + \dots + \Lambda(p_k^{\alpha_k}) =$$

$$= (\underbrace{\log(p_1) + \dots + \log(p_1)}_{\alpha_1}) + \dots + (\underbrace{\log(p_k) + \dots + \log(p_k)}_{\alpha_k}) =$$

$$= \alpha_1 \log(p_1) + \dots + \alpha_k \log(p_k) = \log(p_1^{\alpha_1}) + \dots + \log(p_k^{\alpha_k}) =$$

$$= \log(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = \log(n)$$

—

Άσκ 12: Να βρεθεί η ευελικτική αντιστροφή συναρτησης μ^{-1} ως μ .

Λύση: Επειδή $\mu(1)=1 \Rightarrow \exists \mu^{-1}$.

Ο.δ.ο. $\mu^{-1}=V \quad V(n)=1 \quad \forall n \geq 1$.

Αν f είναι ευελ. αντιστρ. 'συναρτησης' ($\Rightarrow f(1) \neq 0$), τότε:

~~Βεβαιω~~

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & n=1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|m \\ d < n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \end{cases}$$

$$\mu^{-1}(1) = \frac{1}{\mu(1)} = 1 = V(1)$$

$$\mu^{-1}(2) = -\frac{1}{\mu(1)} \sum_{\substack{d|2 \\ d < 2}} \mu\left(\frac{2}{d}\right) \mu^{-1}(d) = -\frac{1}{\mu(1)} \mu(2) \mu^{-1}(1) = -\frac{1}{1} (-1) = 1 = V(2).$$

$$\mu^{-1}(3) = - \frac{1}{\mu(1)} \sum_{\substack{d|3 \\ d < 3}} \mu(3/d) \mu^{-1}(d) = - \frac{1}{\mu(1)} \mu(3) \mu^{-1}(1) = \\ = - \frac{1}{1} (-1) \cdot 1 = 1 = \nu(3).$$

Ενταλ. Υπόθ. : Υπόθ. ότι $\mu^{-1} = \nu(k)$, $3 \leq k < \infty$.

Θ.δ.ο $\mu^{-1}(n) = \nu(n).$

$$\mu^{-1}(n) = - \frac{1}{\mu(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} \mu(n/d) \underbrace{\mu^{-1}(d)}_{\nu(d)=1} =$$

$$= - \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} \mu(n/d) = - \sum_{\substack{d|n \\ d > 1}} \mu(d).$$

Έστω $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ (πρωτ. αντιστοιχ. του n) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \forall d|n : d = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, i=1, \dots, k$ } $\Rightarrow$

$$= - \sum_{\substack{d|n \\ d > 1}} \mu(p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}) = - \sum_{\substack{0 \leq \beta_i \leq 1 \\ (\beta_1, \dots, \beta_k) \neq (0, \dots, 0)}} \mu(p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}) \quad (*)$$

(*) Εξετάζουμε το πλήθος των διαφορετικών γινόμενων $p_1 \dots p_k$
 $1 \leq r \leq k$.

Το πλήθος των διαφορετικών γινόμενων r πρώτων αριθμών από τους $p_1, \dots, p_k$ είναι $\binom{k}{r}$ και τότε η ζητή μας με βάση το γινόμενο είναι $(-1)^r$.

$$\begin{aligned} (*) &= - \left[(-1)^1 \binom{k}{1} + (-1)^2 \binom{k}{2} + (-1)^3 \binom{k}{3} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} \right] = \\ &= - \left[\binom{k}{0} + (-1)^1 \binom{k}{1} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} - \binom{k}{0} \right] = \\ &= - \left[(1 + (-1))^k - \binom{k}{0} \right] = - \left(- \binom{k}{0} \right) = \binom{k}{0} = 1 = \nu(n). \end{aligned}$$

Άρα $\mu^{-1}(n) = 1 = \nu(n)$, $\forall n \geq 1$.